一筆書きできる図形の考察

Consideration of One Stroke Sketch

瀧井　颯人　　瀧川　流生
Hayato Takii　 Ryusei Takigawa

1　研究目的

一筆書きできる図形は，スマホのロック画面のパターン解除や除雪車のルートの作成など日常生活でも幅広く活用されている。特に私たちにとって身近である，スマホのパターン解除では点の個数が３×３の正方形の配置をしたものが主流となっているが，どのようなパターンを設定すればより，解除されにくいのか疑問に感じた。そこで本研究では点の個数や辺の本数を任意の値としたときに，一筆書きできる図形が何種類作図できるのかを考察することを目的としている。そのために一筆書きできる図形がもつ性質についての考察を行った。

2　先行研究

グラフ理論における図形の表記方法について説明する。グラフ理論の世界では，G=(V, E)と表記し，G はグラフ，V は点の数，E は辺の本数を表している。またある点から出ている辺の本数のことを次数といい，次数が奇数である点を奇点，偶数である点を偶点という。

レオンハルト・オイラーによって証明された，一筆書きできる図形の判定方法は次のとおりである。ある図形において，

(i)　すべての点が偶点

(ii)　奇点が２つあり，残りの点がすべて偶点

このどちらかを満たしている図形は一筆書きできる図形である。

3　研究内容

(1)　任意の点の個数(V)における辺の本数(E)の最大値(これを MV とする)，最小値(これを mV とする)を表す関数の数式化

①　最小値(mV)の数式化について

任意の点の個数を決めたとき，すべての点で連結した，連結グラフとなるためには，少なくとも点の個数より *1* 小さい辺の本数が必要となる。よって任意の点の個数 V における辺の本数の最小値 mV は，次のように表せる。

$mV=V-1$

②　最大値(MV)の数式化について

点の個数が V 個である図形について考えるとする。(ただし，V は自然数)

(i)　$V=1$ のとき

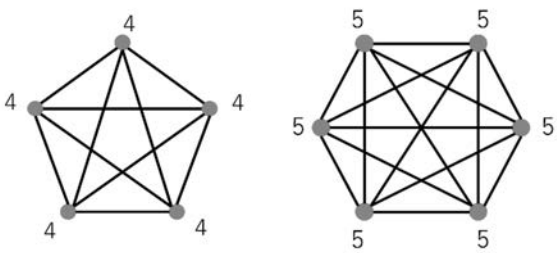
点が *1* つあるだけで辺は存在しないので E は *0* しか取りえない。したがってこのとき，最大値は *0* となる。

(ii)　$V≧2$ のとき

すべての *2* 点間を辺で結んだ図形を作ると，辺の総数は $VC2$ 本となる。この図形において各々の点はその点以外のすべての点と辺でつながっているため，各点の次数は V-*1* となる。

1.V が奇数のとき
⇔V-*1* が偶数
⇒すべての点が偶点
⇒一筆書き可能である

2. V が偶数のとき
⇔V-*1* が奇数
⇒すべての点が奇点
⇒一筆書きできない



したがって V が偶数の場合，奇点が V 個存在する。ここから一筆書きできる図形にするためには，

$(V\text{-}2)$個の奇点を偶点に変える必要がある。*1* 本辺を減らした場合両端で *1* ずつ計 *2* つの次数が減るため，減らすべき辺の本数は$\frac{V-2}{2}$本となる。したがって辺の最大値の数式化は次のとおり。

$$MV \quad = \begin{cases} 0 \quad (V = 1 \text{ のとき}) \\ VC2 \ (V\text{が奇数かつ}V \neq 1 \text{ のとき}) \\ VC2 - \dfrac{V-2}{2} \quad (V\text{が偶数のとき}) \end{cases}$$

また，この①，②で導出された式を利用することで，一筆書きできる図形が少なくとも *1* つ以上存在する$(V,\ E)$の条件が求められる。この結果は表１のとおり。色がついているマスに書かれた$(V,\ E)$条件下であれば一筆書きできる図形が存在することを表している。
この表１において各列に注目したとき，左端にあたる座標が$(V,\quad mV)$，右端にあたる座標が$(V,\quad MV)$となる。

表１　一筆書きできる図形存在する（*V*，*E*）の条件

（縦：*V* 横：*E*）

V＼E	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	・・・	13	・・・	21
0															
1	(1,0)														
2		(2,1)													
3			(3,2)	(3,3)											
4				(4,3)	(4,4)	(4,5)									
5					(5,4)	(5,5)	(5,6)	(5,7)	(5,8)	(5,9)	(5,10)				
6						(6,5)	(6,6)	(6,7)	(6,8)	(6,9)	(6,10)	・・・	(6,13)		
7							(7,6)	(7,7)	(7,8)	(7,9)	(7,10)	・・・	・・・	・・・	(7,21)

(2)　任意の *V* における *E* の値の個数を表す関数($N_{(V)}$)の数式化

任意の *V* における *E* の値の個数とは，表１において，任意の行を決めたときの，一筆書きできる図形が存在するために必要な *E* の種類の個数のことであり，これはその行における塗りつぶしされたマスの個数を求めることと一致する。

例えば，$V=4$ としたとき表１より，この行で塗りつぶしされたマスは$(4,\ 3)\,(4,\ 4)\,(4,\ 5)$である。したがって，*E* の値の種類は *3*，*4*，*5* の *3* 種類となり，個数は *3* 個である。これを任意の点の個数 *V* に置き換えたとき，最大値と最小値はすでに導出されているため，その２つの値の差に *1* を足すことで，$N_{(V)} = MV - mV + 1$ と表せる。この式の *MV*，*mV* に研究内容①で導出された数式を代入し整理すると次のとおり。

$$N_{E(V)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(V^2 - 3V + 4) \quad (V\text{が奇数のとき}) \\ \dfrac{1}{2}(V^2 - 4V + 6) \quad (V\text{が偶数のとき}) \end{cases}$$

$N_{E(V)}$に $V=3$ を代入したとき *3* が得られる。

(3)　任意の *E* における *V* の値の個数を表す関数($N_{(E)}$)の数式化

任意の *E* における *V* の値の個数とは，表１において，任意の列を決めたときの，一筆書きできる図形が

存在するために必要な V の種類の個数のことであり，これはその列における塗りつぶしされたマスの個数を求めることと一致する。例えば，$E=5$ としたとき表１より，この行で塗りつぶしされたマスは(*4*, *5*)(*5*, *5*)(*6*, *5*)である。したがって，V の値の種類は *4*, *5*, *6* の *3* 種類となり，個数は *3* 個である。これも(2)と同様に最大値と最小値の値の差に *1* を足すことで求められると考える。よって，まず最大値と最小値のそれぞれの数式化について考える。

まず最大値について考える。表より任意の E の値を決めたとき，存在する V の最大値は　$E+1$ となる。例えば $E=5$ のとき，この列のなかで V が最大値をとるのは(*6*, *5*)のときであり，最大値は *6* となる。これは $E+1$ に代入したときに得られる *6* と一致する。E が 5 でないときでも同様にこの式が成り立つ。

次に最小値について考える。まず最小値を V' とする。先ほどの表のうち，最小値 V'，すなわち任意の E を決めたときの V の最小値のマスのみを取り出した表は表２のとおり。各座標は（V'，　E）となっている。このうち紫色の丸で囲まれた値は，(V,　MV)であり数式化できている。

表２からわかるように，最小値 V' は $E=MV$ をターニングポイントとして階段状に増加していく。例えば $E=4$, *5* のとき，$V'=4$ であるが，$E=6$,　*7*,　*8...10* になると，$V'=5$ となり，$E=5$ を境に V' の値が大きくなっている。そして，V' は $E \leqq MV$ という不等式を満たす最小の V を求めることで導出できる。

表２　任意の E における（V'，E）となる座標

V＼E	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	・・・	13	・・・	21
0															
1	(1,0)														
2		(2,1)													
3			(3,2)	(3,3)											
4					(4,4)	(4,5)									
5							(5,6)	(5,7)	(5,8)	(5,9)	(5,10)				
6												・・・	(6,13)		
7														・・・	7,21)

これにより最大値，最小値を導出する方法を見出すことができた。よって，この *2* つの値の差をとり，*1* を足すことで求められるため,

$N_{V(E)}=E+1-V'+1$

$\quad\quad=E-V'+2$

よって，任意の E における V の値の個数は次のとおり。

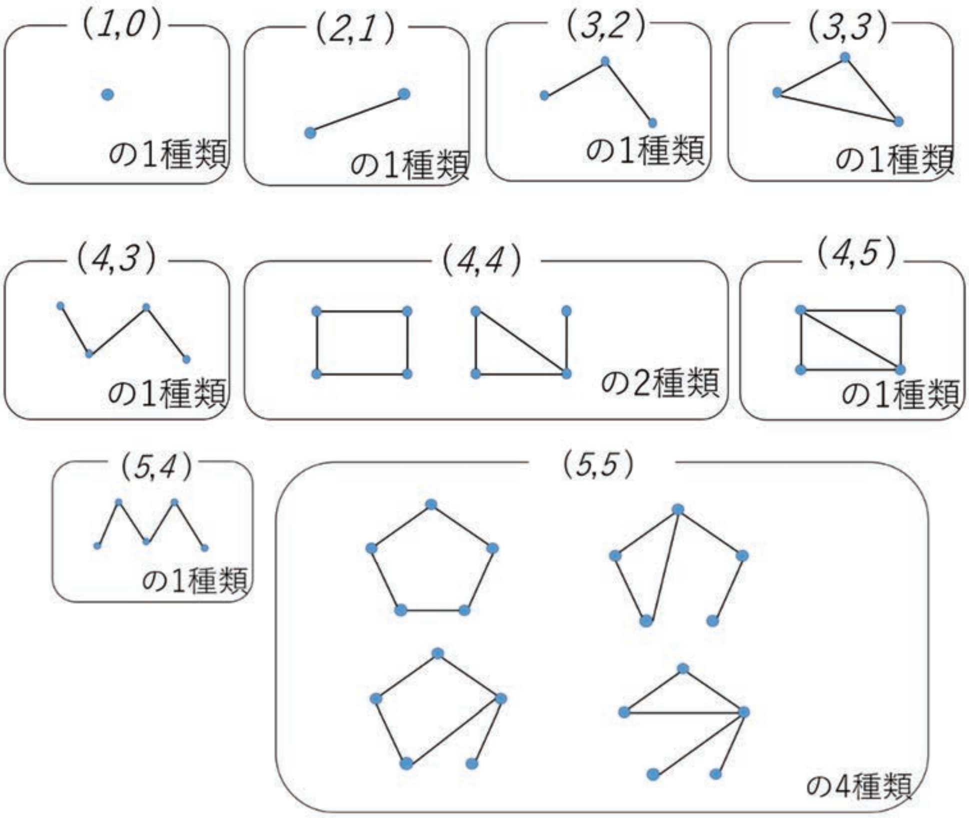
$N_{V(E)}=E-V'+2$

$N_{V(E)}$ に $E=3$ を代入したとき *3* が得られる。

(4)　任意の(V, E)における存在する図形の個数を調べる。

(V, E)をそれぞれ任意の値としたとき，何種類の図形が存在するのかについて，調べる。

例えば，(V, E)=(*3*, *2*)のときは次の *1* 種類。また，(V, E)=(*5*, *5*)のときは次の *4* 種類。



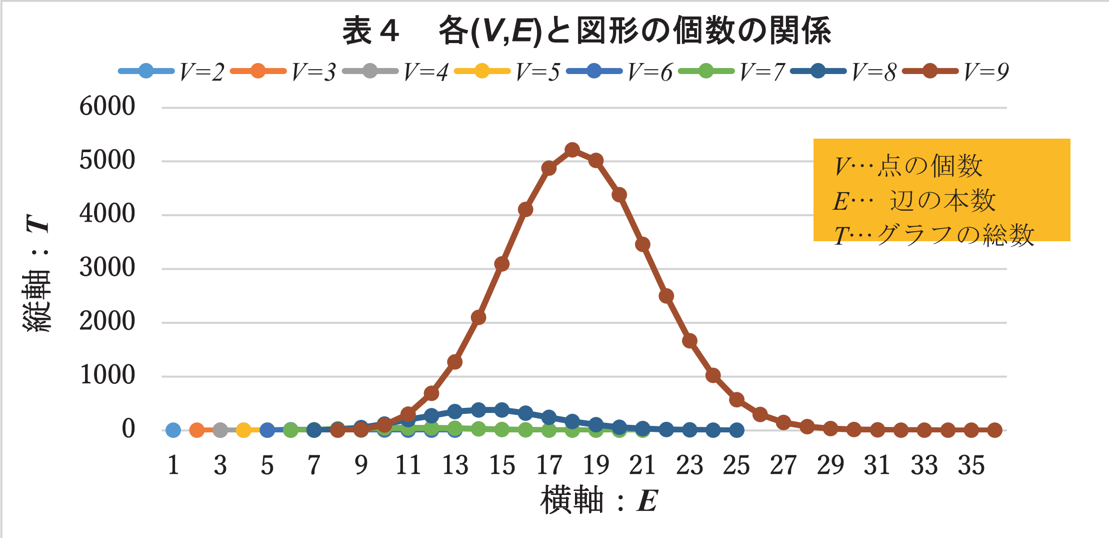
Pythonを用いて，この種類を数える作業を行うプログラムを作成し，実行させた。このプログラムは，任意の(V，E)を満たす図形を隣接行列で表現する。すべての場合の行列を計算し，そこから一筆書きできる条件を満たす行列のみを抽出し，数えている。得られた結果は次のとおり。ただし，各行の中で個数が最大となる値を赤色で表している。

また，この各(V，E)における図形の個数を T という関数で表すとする。この時，各 V の値ごとに E と T の関係を表したグラフを作成した。結果は表４のとおり。

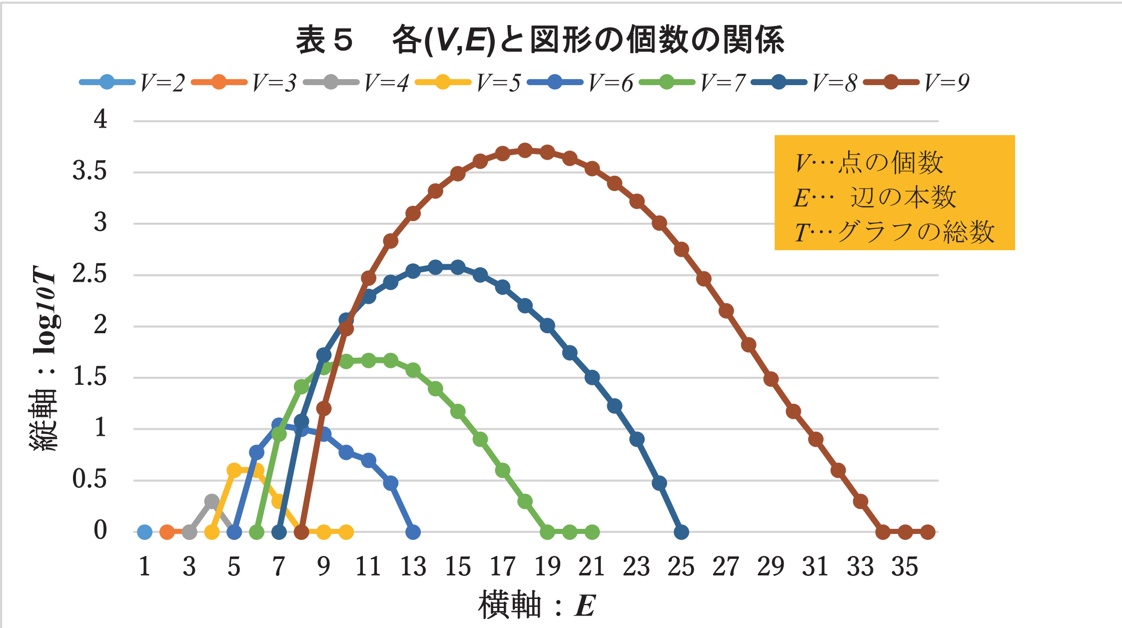
表３　各（V，E）における図形の個数

V ＼ E	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	0																		
2		1																	
3			1	1															
4				1	2	1													
5					1	4	4	2	1	1	1								
6						1	6	11	10	9	6	5	3	1					
7							1	9	26	40	46	47	47	38	25	15	8	4	2
8								1	12	53	116	197	271	348	380	379	320	244	161
9									1	16	96	298	686	1270	2099	3092	4107	4877	5214
10										1	20	162	668	2032	4886				

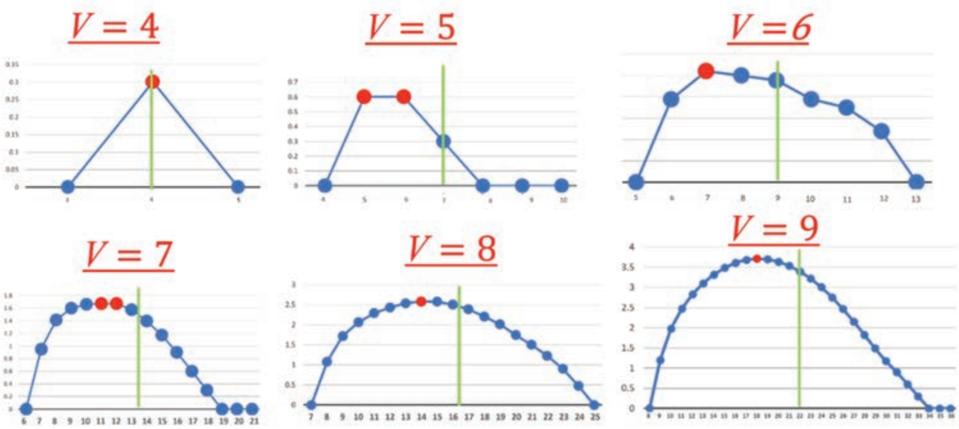
V ＼ E	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1																		
2																		
3																		
4																		
5																		
6																		
7	1	1	1															
8	103	56	32	17	8	3	1											
9	5021	4382	3461	2498	1665	1024	568	293	143	67	31	15	8	4	2	1	1	1
10																		



しかしこのままでは，V が小さい時のグラフが圧縮されてしまい，分かりにくいため，縦軸を常用対数に変換したグラフを作成した。結果は表５のとおり。



また各 V の値ごとのグラフを作成した。結果は次のとおり。



（横軸：E，縦軸：$log10\ T$）

また赤色の点はデータの最大値を表し，緑色の線は中央値を通り横軸に垂直となるよう引いている。

4　考察

(1)　すべてのグラフに共通することとして，上に凸の概形をする。

(2)　*E* が最大値(*MV*)，最小値(*mV*)をとるとき，つまりグラフの両端の値は必ず $log10\ T = 0$，つまり $T\ =1$ となり，図形は *1* 種類しか存在しない。これは，辺の本数が最大値・最小値をとる場合は辺の結び方が *1* 通りに限定されるからだと考えている。一方で，辺の本数が最大値，最小値を取らない場合は辺の結び方が複数存在するため，図形の個数が多くなり，グラフの概形が上に凸になると考えている。

(3)　最大値をとる点の *E* の値はいずれのグラフにおいても，中央値かそれよりも小さい値をとる。したがって図形の個数 *T* の増加率は *E* が小さいときに大きく，*E* が大きいときに小さいといえる。

日常生活で活用されているスマホのパターン解除は本研究とは異なり各点を一度ずつしか通れないため，この結果と直接的な関係を見出すことは困難であるが，一般的な特徴として取りうる E の値が範囲の中盤である値にすれば，存在する図形は多くなる傾向にあり，より安全性が高くなると考察した。

5　結論

一筆書きできる図形の点の個数，辺の本数について，一方を変数とした時の他方の存在する範囲を数式化することができた。また図形の種類の個数についてグラフ化することができ，その概形が一定の増減をすることが分かった。

安全性の高いスマホのパターンロックとして，辺の本数を中央値あたりに設定する良いということが分かった。

6　謝辞

今回の研究を行うにあたり，お世話になった方々に，厚く御礼申し上げます。

7　参考文献

“高校数学の美しい物語”..2022-2-9.
https://manabitimes.jp/math/642
出版社：株式会社ベンド

鈴木晋一.“数学教材としてのグラフ理論”.
早稲田大学教育総合研究所，2012，197p