メビウスの帯　～無限の可能性～

安原　輝　　山下　清十郎

1. 研究目的

メビウスの帯ではない普通の帯を二つ用意し，それらを直角に貼り合わせ，それを帯の中央線で切ったとき，正方形ができることを知り，これをメビウスの帯を 2 つ使用して実験を行うとどのような結果になるのか興味を持った。そこで私たちは，メビウスの帯をつなげる個数を変化させたり，メビウスの帯に加えるひねり（180°のひねりを 1 ひねりとする）の数を変化させたりして，メビウスの帯に関する法則を見つけることを目的として研究を行うことにした。

2. 研究方法

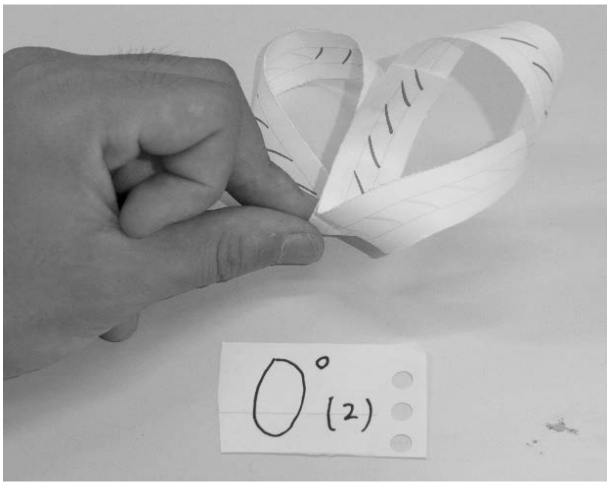
実験に使用した器具や材料は以下の通りである。

・ルーズリーフ / B5
・スティックのり
・ハサミ
・マスキングテープ
・蛍光ペン

私たちがこれまでに行った実験は以下の通りである。なお，実験①，②，③は昨年行い，実験④，⑤は今年行った。

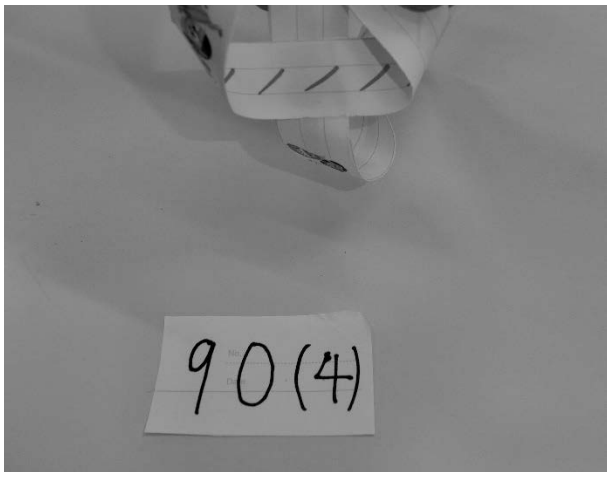
実験①…メビウスの帯どうしをつなげるとき，メビウスの帯の面どうしがなす角度を 0°（写真①）にして，メビウスの帯を 2,3,4 個つなげたもの（帯はすべて右手型）を用意して，それらを帯の中央線で切る。

実験②…メビウスの帯どうしをつなげるとき，メビウスの帯の面どうしがなす角度を 45°，90°（写真②-1,②-2）にして，メビウスの帯を 4 個つなげたもの（帯はすべて右手型）を用意して，それを帯の中央線で切る。



写真①

写真②-1



写真②-2

図③

実験③…つなげる帯の個数が 1,2,3,4,5 個のときの，すべての組み合わせを試す。また，メビウスの帯をつなげるとき，図③のようにつなげる。

組み合わせ（右手型＝R,左手型＝L）

1 個のとき…R の場合を調べる。（R,L は鏡像関係にあるため，その関係にあるもののうち片方のみを調べる）

2 個のとき…RR,RL の場合を調べる。（RR と LL，RL と LR は鏡像関係にあるため，その関係にあるもののうち片方のみを調べる）

3 個のとき…RRR,RRL,RLR の場合を調べる。（RRR と LLL，RRL と LLR と LRR と RLL，RLR と LRL はそれぞれ鏡像関係にあるため，その関係にあるもののうち一つを調べる）

4 個のとき…RRRR,RRRL,RRLR,RLRR,RRLL,RLRL,RLLR の場合を調べる。(RRRR と LLLL, RRRL と LLLR と RLLL と LRRR，RRLR と LLRL，RLRL と LRLR，RLLR と LRRL はそれぞれ鏡像関係にあるため，その関係にあるもののうち一つを調べる）

実験④…つなげるメビウスの帯の個数を 1,2,3……と増やしていき，それらを切った後にできたものの帯の個数を調べる。また，帯はすべて右手型のものを使用する。

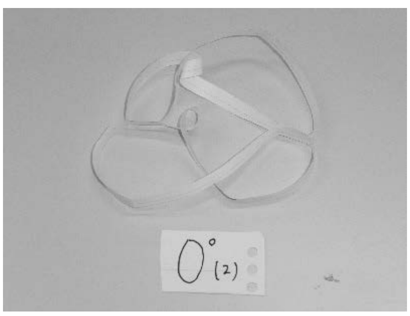
実験⑤…メビウスの帯を複数個つなげたものを用意し，つなげた帯のうち，端の一個を切らずにそれ以外の帯を切った後にできたものの特徴を調べる。帯はすべて右手型のものを使用し，今回は，つなげる帯の個数が 2〜7 個の場合を調べた。（図⑤）

図⑤

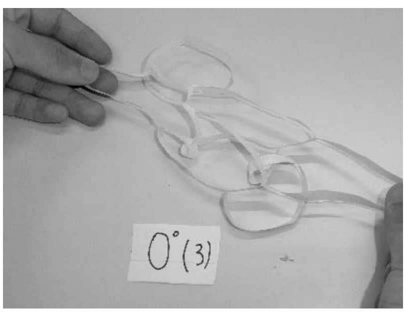
3. 得られた結果

・実験１の結果

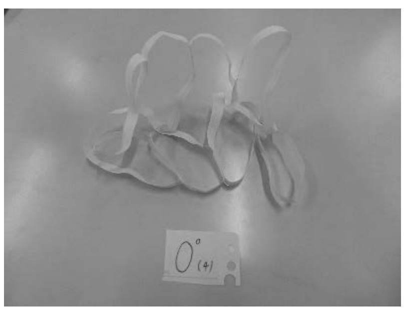
メビウスの帯同士のなす角が０°のとき，一つの絡まった帯になった。



2 個



3 個

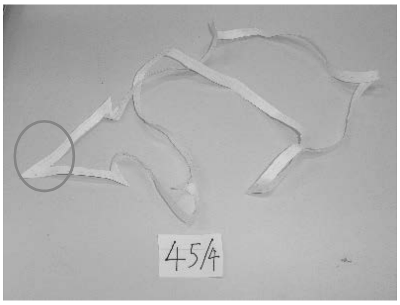


4 個

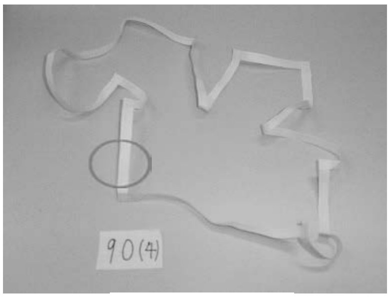
なす角が０°で，メビウスの帯を 2, 3, 4 個繋げて切ったもの

・実験２の結果

繋げる個数が同じとき，写真に丸で示した部分の折れ曲がっている部分の角度が 45°，90°のときでそれぞれ異なるという特徴が見られたが，この特徴を除くとできた図形は同じ構造であった。



45°のとき



90°のとき

メビウスの帯を４個つなぎ，なす角を 45°，90°にしたもの

なお，ここまでの実験結果を踏まえて，以後の実験では 90°のもののみを使っている。

・実験３の結果

切った後の形の特徴，ひねりの数は以下の表のようになった。

鏡像関係にあるものは RR/LL のようにひとまとまりのものとしている。

・１個のとき

切った後も大きな１つの帯になり，ひねりの数は２であった。

・２個のとき

繋げ方	形の特徴	切った後のひねりの数
RR/LL	帯が２つに分かれた。	2
RL/LR		

いずれの組み合わせでも図形の特徴は変わらなかった。

・３個のとき

繋げ方	形の特徴	切った後のひねりの数
RRR/LLL	１つの帯になった。	2
RRL/LLR・LRR/RLL		
RLR/LRL	１つの帯になり，絡み目があった。	

RLR/LRL のとき，ほどくことのできない絡み目が生じたがそれ以外の特徴はいずれも同じであった。

・４個のとき

繋げ方	形の特徴	切った後のひねりの数
RRRR/LLLL	いずれも１つの帯になった。	0
RRRL/LLLR・RLLL/LRRR		
RRLR/LLRL・RLRR/LRLL		
RRLL/LLRR		
RLRL/LRLR		
RLLR/LRRL		

1,2,3 個のときと異なって，ひねりの数が０になった。

この結果において，繋げる帯の個数が同じならば，右手型と左手型の組み合わせ方にかかわらず切った後の帯の個数が同じになることに注目して，実験４を行った。

・実験４の結果

結果は以下の表のようになった。

繋げた帯の個数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
切った後にできた帯の個数	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	1

この実験から，切った後の帯の個数は「1,2,1」が循環する形になると考えられる。

このことを調べるために，帯をすべて切る前の図形の特徴が繋げる帯の個数が(3n-2)個，(3n-1)個，3n 個の時それぞれで似ていることに気づいたので実験５を行った。

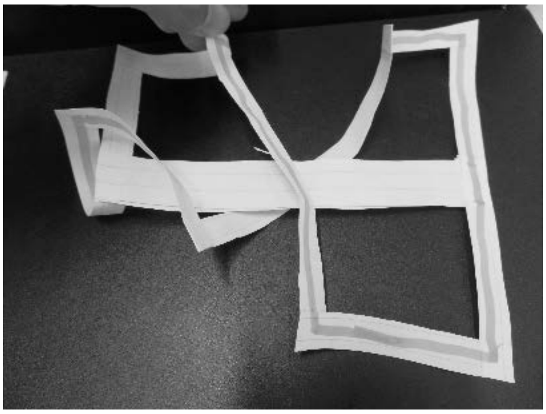
・実験５の結果

写真は実際にできた図形，特徴を保ちつつ簡略化したものを示している。なお，簡略化した図形は，切らずに残した帯の，その帯以外を切ってできる帯へのくっつき方の特徴を保ったものである。

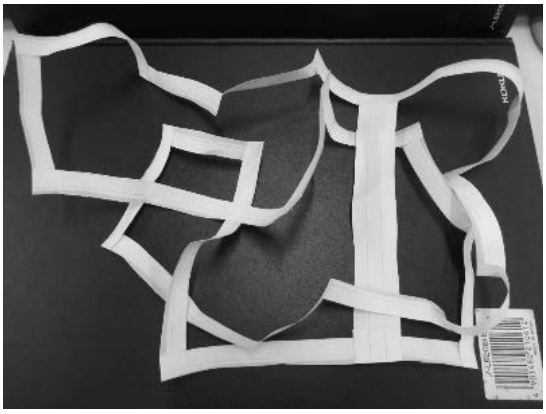
・(3n-2)個のとき

写真の色付けされていない太い帯が切らずに残した帯，色付けした帯が残す帯以外を切ることでできる帯である。後者の帯はメビウスの帯ではない，すなわち，裏表のある帯である。

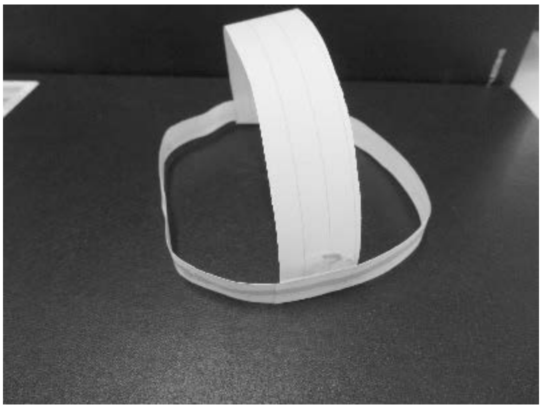
この図形の特徴として，切らずに残した帯が残す帯以外を切ることでできる帯の同じ面にくっついていることが挙げられる。

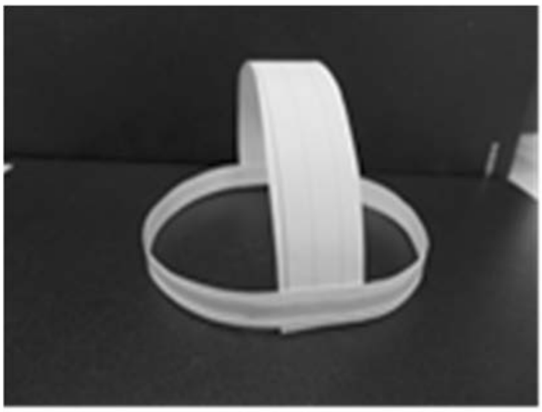


4 個



7 個

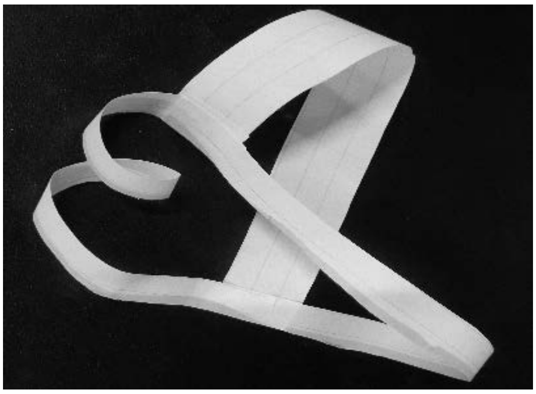


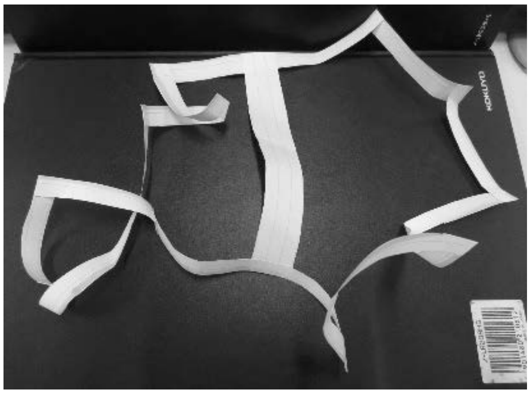


簡略化したものを両側から見たもの

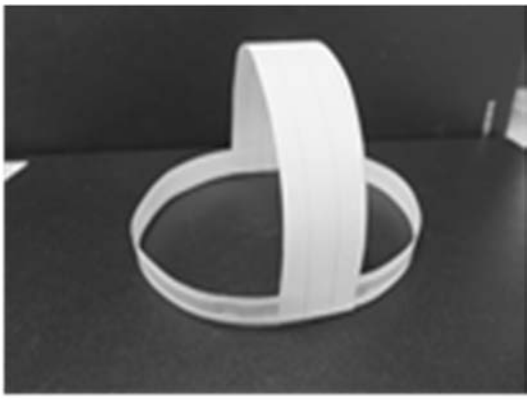
・(3n-1)個のとき

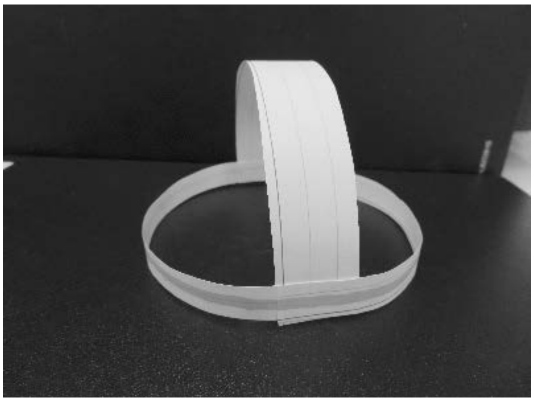
(3n-1)個のときと同様に，写真の色付けされていない太い帯が切らずに残した帯，色付けした帯が残す帯以外を切ることでできる帯である。このときも，後者の帯はメビウスの帯でない裏表のある帯である。もこの図形の特徴として，切らずに残した帯が残す帯以外を切ることでできる帯の異なる面にくっついていることが挙げられる。





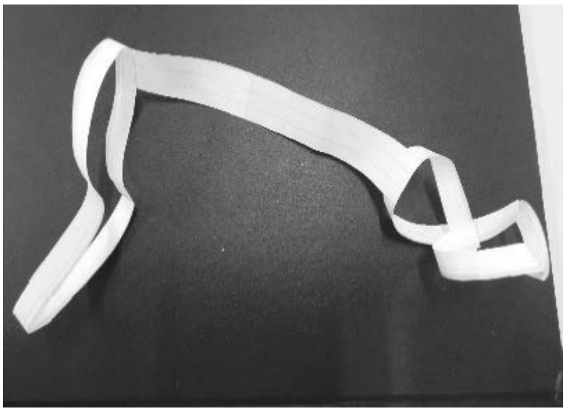
２個　　　　　　　　５個





簡略化したものを両側から見たもの

・3n 個のとき
(3n-1)個のときと同様に，写真の色付けされていない太い帯が切らずに残した帯，色付けした帯が残す帯以外を切ることでできる帯である。
この図形の特徴として，切らずに残した帯の両端に一つずつ帯がくっついていることが挙げられる。



３個　　　　　　　　６個

4. 考察

・実験１，２より，同じ個数の帯を繋いだとき，帯を切った後にできる図形の特徴は，帯同士のなす角が０°，０°以外の場合で異なると考えられる。
・実験３より，帯を繋ぐ個数が２から４個のときにおいては，右手型，左手型の組み合わせに関わらず，切った後にできる帯のひねりの数，個数は同じになることが見つけられた。このことから，３個の RLR/LRL のとき，

絡み目ができるという特異的な特徴があったものの，右手型，左手型の組み合わせの違いが，切った後にできる帯の特徴に影響を与えることはないのではないかと考えた。
・実験４より，切った後の帯の個数は，繋げる帯の個数が，(3n-2）個，3n 個のとき１つに，(3n-1)個のとき２つになっていると考えた。また，このことから，繋げる帯の個数が１ずつ増えていくとき，切った後の帯の個数は「1,2,1」が循環していると考えられる。
・実験５より，残した帯を切る前の特徴が異なることから，すべての帯を切った後にできる帯の個数が(3n-2)個のとき１個, (3n-1)個のとき２個, 3n 個のとき１個になるのはそれぞれ異なる現象によるものだと推測できる。

また，位相幾何学の観点から考察をした。
・メビウスの帯の左手型，右手型は同相であることが知られている。このことから，繋げる帯の個数が一定ならば右手型，左手型の組み合わせを変えて繋げたものはいずれも同相なのではないかと考えた。このため，実験３のような結果が得られたと考えられる。
・切った後の帯の個数に注目すると，いずれの個数の帯を繋いだときも，１個または２個のみになっている。この切った後の帯の個数が 1 個，2 個になるという現象は，それぞれ１つの普通の帯，メビウスの帯を切ったときにも見られる。これらのことを踏まえて，帯を複数個繋いだものを切ったとき，起きる現象はひとつの普通の帯，または，メビウスの帯を切ったときに起きる現象と同じものとみなせる，すなわち，実験 5 でメビウスの帯を 1 つ切らずに残すことでできた図形は，(3n-2)個，3n 個のときはメビウスの帯と同相，(3n-1)個のときは普通の帯と同相なのではないかと考えた。

今回の研究では，7 個のときまでしか詳しい実験を行えていないので，あらゆる個数をつないだときにもこの考察が成り立つことを証明することが今後の課題である。

5. 結論

メビウスの帯をつなぐ個数を 1,2,3…と増やしていったとき，それらを切った後にできる帯の個数は「1,2,1」が循環すると考えられるが，このことが一般に成り立つかどうかを証明していく必要がある。

6. 謝辞

本研究を進めるにあたって，指導してくださった吉田猛先生をはじめ，高松第一高等学校の先生方に厚く感謝申し上げます。

7. 参考文献

・四次元のトポロジー　　松本幸夫　著