ビュフォンの針
～正２n角形で研究してみよう～

長尾　拓真　　野口　幸太朗

1. 研究の動機や目的

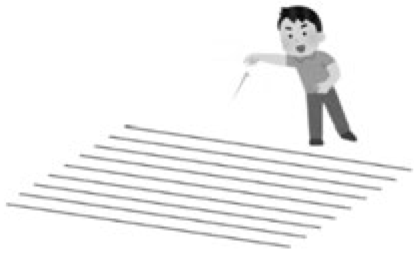
図形が正２n角形であるとする。この図形を無数にある等間隔の平行線に投げ入れたとき，図形が平行線に触れる確率を求め，公式化する。

＊奇数角形は最長の対角線が回転の中心を通らず，条件設定が難しかったので，研究の対象外とし，正２n角形だけを調べることにした。（nは２以上の自然数）

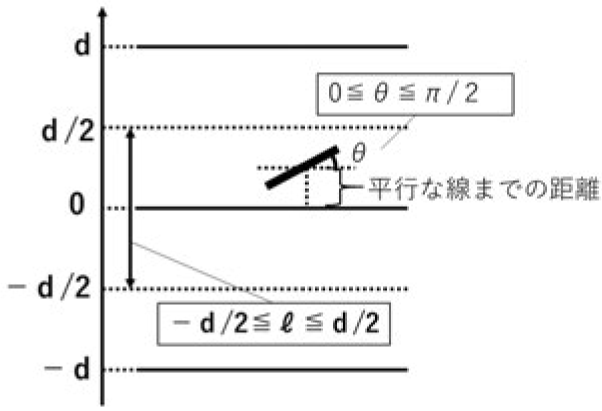
ビュフォンの針の概要

針が無数にある等間隔の平行線に対して落ちることを考える。
平行線に対する針の状態は，次の二つで表現できる。

- ・針の中心と平行線の距離
- ・針と平行線の角度



平行線の間隔をｄ，針の長さを $\frac{d}{2}$ と設定する。θは平行線と針のなす角度であり，これは $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ の値をとる。ℓは一番近い平行線に対する針の中心の位置を表す。また，平行線と針の中心の距離は一番近い一本の平行線と針の中心の距離を考えればよいので，針の中心の位置は一番近い平行線の座標を０にとると， $-\frac{d}{2} \le \ell \le \frac{d}{2}$ となる。



まとめると

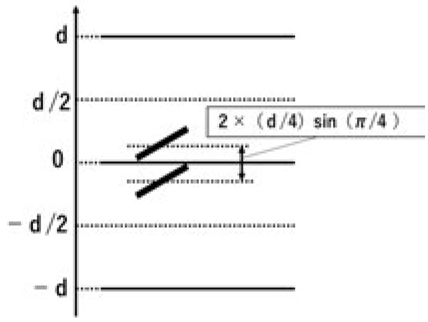
平行線と針の角度：$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

一番近い平行線に対する針の中心の位置： $-\frac{d}{2} \le \ell \le \frac{d}{2}$

θが $\frac{\pi}{4}$ のときを考えてみる。針が $\frac{\pi}{4}$ 傾いたとき，平行線と針の中心の距離が，$\frac{d}{4}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{d}{4\sqrt{2}}$ となることを考慮すると，針が平行線と触れるための中心の位置ℓは，右の図のように線の上下に位置できると考えられて，

$$\ell \le 2 \times \frac{d}{4}\sin\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{d}{4\sqrt{2}} = \frac{d}{2\sqrt{2}}$$

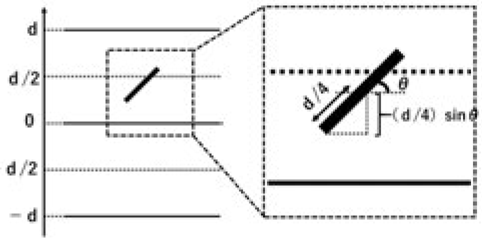
となる。

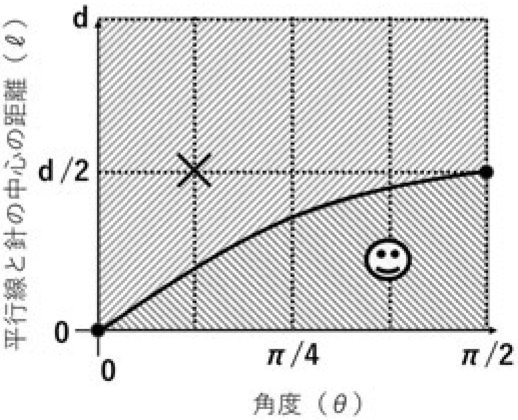


角度が θ の時，平行線と針の中心の距離 m は，右下の図から$\mathrm{m}=\frac{\mathrm{d}}{4}\sin\theta$となる。
したがって，針が平行線と触れるための中心の位置 ℓ の範囲は，

$$\ell \leq \mathrm{m}\times 2=\frac{\mathrm{d}}{4}\sin\theta\times 2=\frac{\mathrm{d}}{2}\sin\theta$$

これで ℓ と θ の関係が分かったので，次のようなグラフが完成する。





左の曲線は　$\ell=\frac{\mathrm{d}}{2}\sin\theta$　を表している。

☺の領域は針が平行線と触れるとき，×の領域は針が平行線と触れないときを表している。長方形の面積は，全事象を表している。

☺の面積$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}}{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}}{2}$

☺ +×の面積$=\frac{\pi}{2}\times\ \mathrm{d}\ =\frac{\pi\mathrm{d}}{2}$

$$\frac{☺\text{の面積}}{☺+\times\text{ の面積}}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{2}}{\frac{\pi\mathrm{d}}{2}}=\frac{1}{\pi}$$

したがって針を投げ続けると，$\frac{\text{針が線に触れる回数}}{\text{針を投げた回数}}$ は $\frac{1}{\pi}$ に近づく。

この確率の逆数は，πになる。

2. 研究の方法や内容

① 正 2n 角形の一番長い対角線の長さを ℓ で固定する。(0 ＜ℓ≦ d)　（図 1）

② 図形が回転する角度を θ として，θ の範囲を設定する。（図 2）

③ ある角度 θ における縦の長さ y を求める。このとき図形が平行線と触れるための中心の位置は，（図 3）のように一番近い平行線を中心に上に $\frac{\mathrm{y}}{2}$，下に $\frac{\mathrm{y}}{2}$ つまり合計　y　だけ動くことができる。

④ y を②で設定した θ の範囲で積分し，（図 4）の触れる部分の面積を求める。

⑤ 確率 S = $\frac{\text{触れる（}S_1\text{）}}{\text{触れる+触れない（}S_2\text{）}}$を求める。

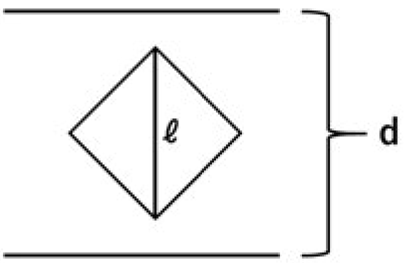


図 1

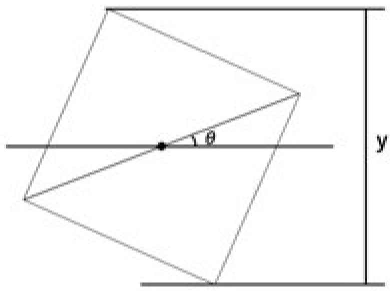


図 2

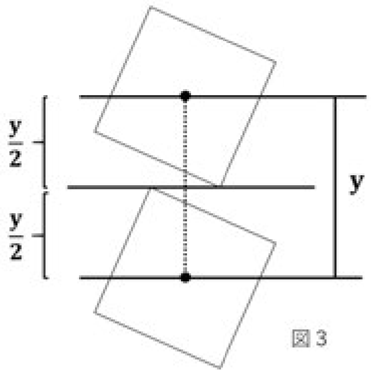


図 3

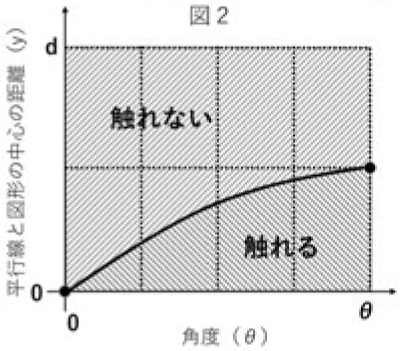
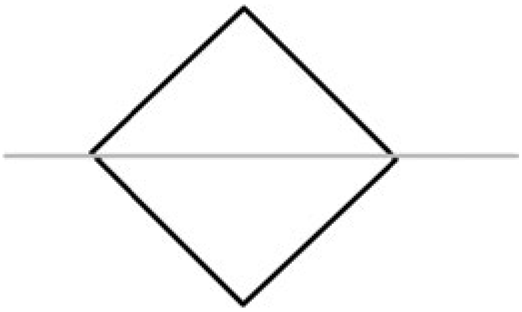


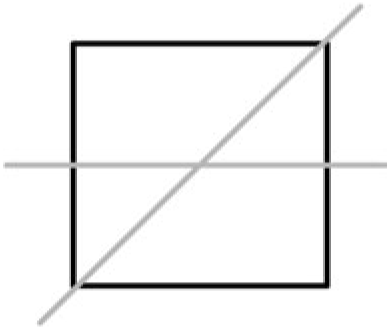
図 4

正方形

角度　$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$

（ｉ）θ＝0　　　　　　　　（ⅱ）$\theta = \frac{\pi}{4}$





ｙを求めると，

$AO = \frac{\ell}{2}$

$\angle AOB = \angle ACO = \frac{\pi}{2}$

$\angle AOC = \frac{\pi}{2} - \theta$

直角三角形 AOC において

$AC = \frac{y}{2} = \frac{\ell}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

したがって　$y = \ell\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \ell\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\ell\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right\} d\theta$$

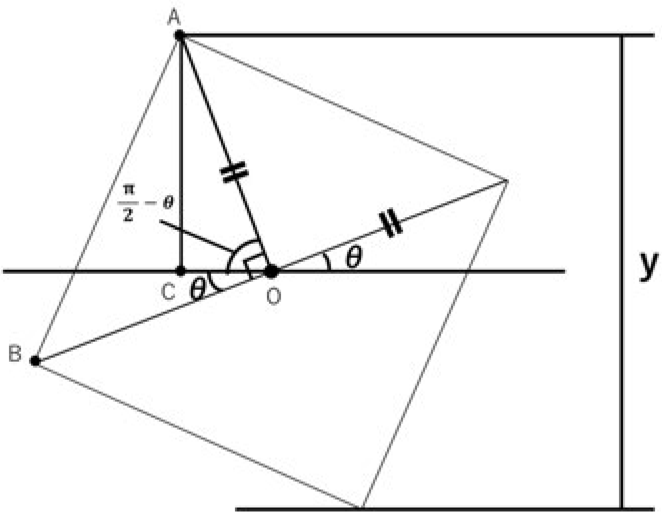
$$= \ell\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \, d\theta$$

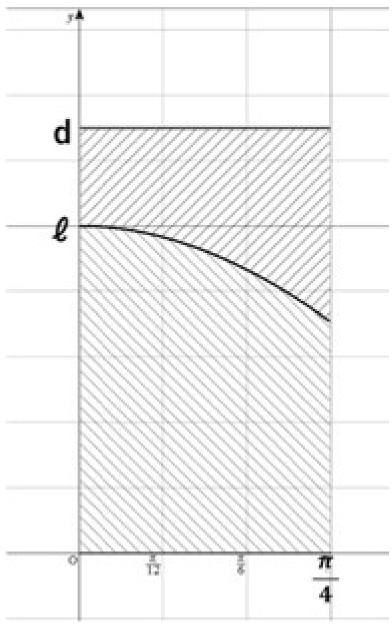
$$= \ell[\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \ell\left(\sin\frac{\pi}{4} - \sin 0\right)$$

$$= \frac{\ell}{\sqrt{2}}$$

$S_2 = d \times \frac{\pi}{4} = \frac{d\pi}{4}$　　　　$\mathbf{S} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{2\sqrt{2}\,\ell}{d\pi}$

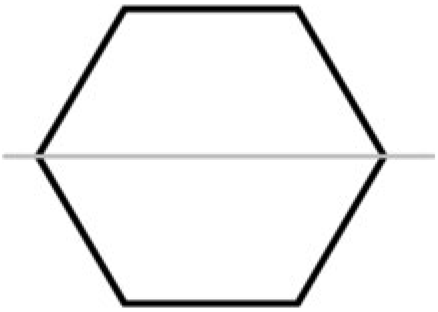




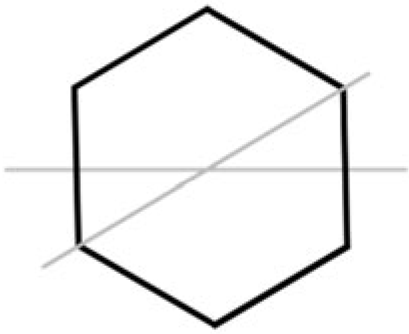
正六角形

角度　$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{6}$

（ｉ）$\theta=0$



（ⅱ）$\theta=\frac{\pi}{6}$



ｙを求めると，

$AD = \ell$

$BC \parallel ED$

よって$\angle BOG = \angle EDF = \theta$

$\angle ADE = \frac{\pi}{3}$

直角三角形 ADF において

$AF = y = \ell \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left\{\ell \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)\right\} d\theta$$

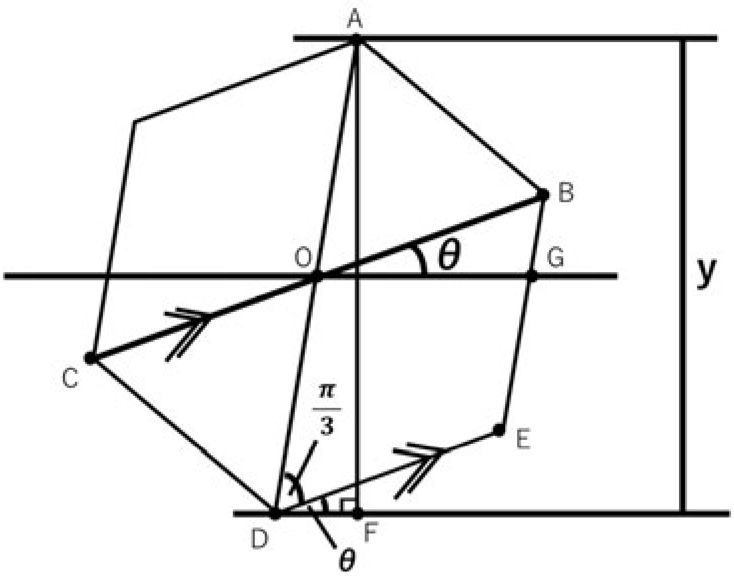
$$= -\ell\left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

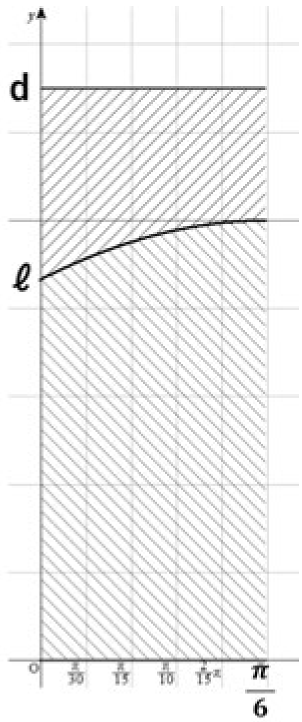
$$= -\ell\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{\ell}{2}$$

$$S_2 = d \times \frac{\pi}{6} = \frac{d\pi}{6}$$

$$\mathbf{S} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{3\ell}{d\pi}$$

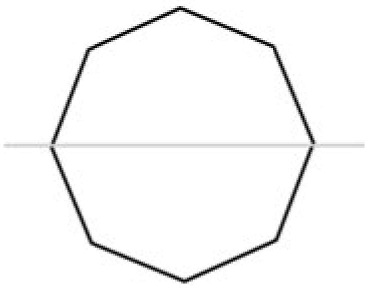


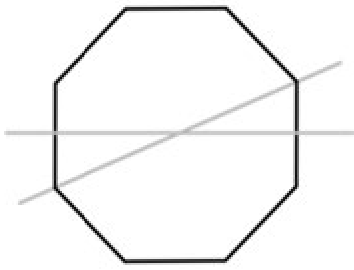


正八角形

角度　$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{8}$

（i）$\theta = 0$　　　　（ii）$\theta = \frac{\pi}{8}$





ｙを求めると，

$AO = \frac{\ell}{2}$

$\angle AOB = \angle ACO = \frac{\pi}{2}$

$\angle AOC = \frac{\pi}{2} - \theta$

直角三角形 AOC において

$AC = \frac{y}{2} = \frac{\ell}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

したがって

$y = \ell\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \ell\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

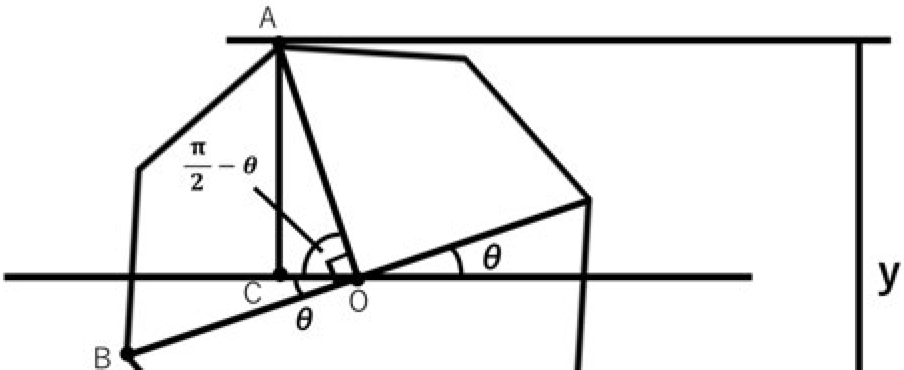
$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{8}}\left\{\ell\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right\}d\theta = \ell\int_0^{\frac{\pi}{8}}\cos\theta\, d\theta$

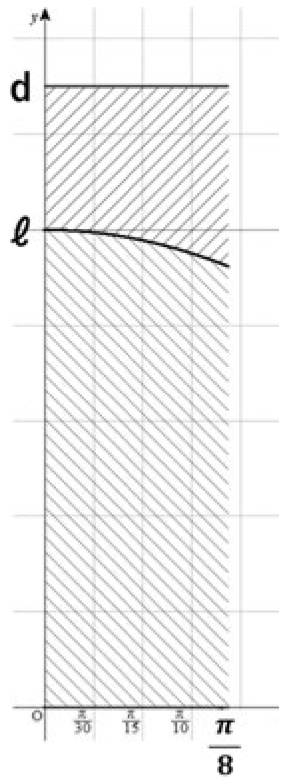
$= \ell[\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{8}} = \ell\left(\sin\frac{\pi}{8} - \sin 0\right)$

$= \ell\sin\frac{\pi}{8}$

$S_2 = d \times \frac{\pi}{8} = \frac{d\pi}{8}$

$\mathbf{S = \frac{S_1}{S_2} = \frac{8\ell}{d\pi}\sin\frac{\pi}{8}}$

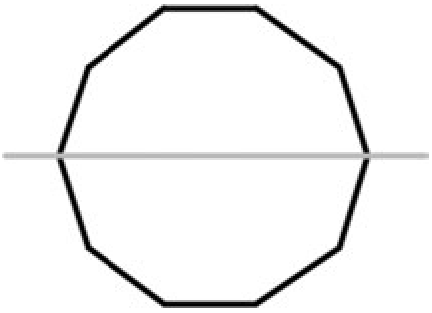


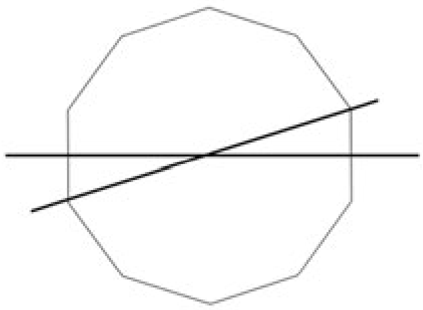


正十角形

角度　$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{10}$

（ｉ）$\theta = 0$　　　　　　　　　　（ⅱ）$\theta = \frac{\pi}{10}$





ｙを求めると，

$AD = \ell$

$BC \parallel ED$

よって$\angle BOG = \angle EDF = \theta$

正十角形のひとつの内角は $\angle HDE = \frac{4}{5}\pi$

だから

$\angle HDE = 2 \cdot \angle ADE$　より　$\angle ADE = \frac{2}{5}\pi$

直角三角形ADFにおいて

$AF = y = \ell \sin\left(\frac{2}{5}\pi + \theta\right)$

したがって　$y = \ell \sin\left(\frac{2}{5}\pi + \theta\right)$

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{10}} \left\{ \ell \sin\left(\frac{2}{5}\pi + \theta\right) \right\} d\theta$$

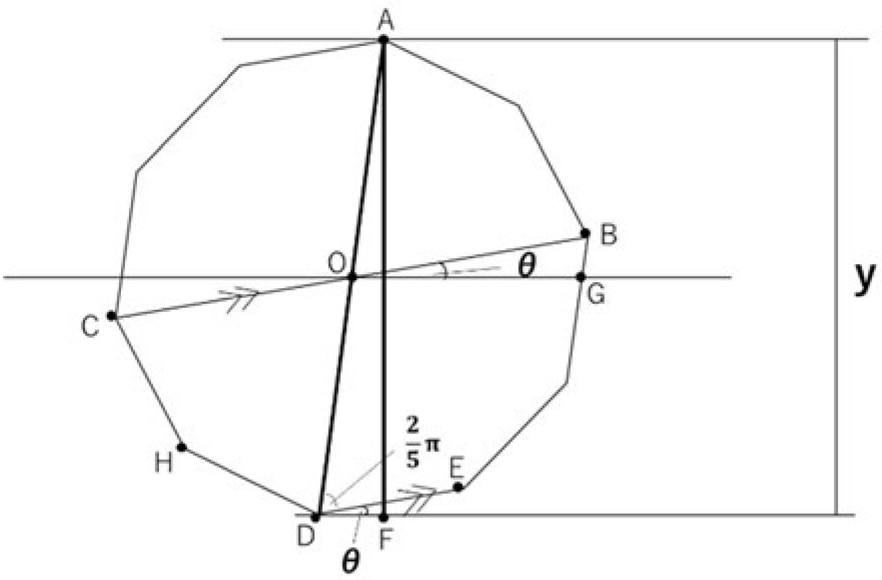
$$= -\ell \left[\cos\left(\frac{2}{5}\pi + \theta\right) \right]_0^{\frac{\pi}{10}}$$

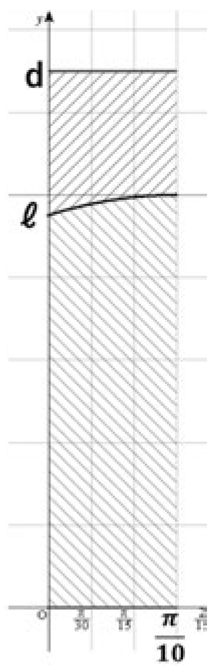
$$= -\ell \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{2}{5}\pi \right)$$

$$= \ell \cos\frac{2}{5}\pi$$

$$= \ell \sin\frac{\pi}{10}$$

$S_2 = d \times \frac{\pi}{10} = \frac{d\pi}{10}$　　　　　$\mathbf{S = \frac{S_1}{S_2} = \frac{10\ell}{d\pi} \sin\frac{\pi}{10}}$





図形を一般化します。
正２n 角形
① 正 2×（偶数）角形　n = 2k　（ k ＝ 1 , 2 , 3 , … ）
角度の範囲　　$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2n}$

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \left\{ \ell \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \right\} d\theta \qquad S_2 = \frac{d\pi}{2n}$$

$$= [\ell \sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2n}}$$

$$= \ell \sin\frac{\pi}{2n} \qquad S = \frac{S_1}{S_2} = \frac{2n\ell}{d\pi}\sin\frac{\pi}{2n}$$

② 正 2×（奇数）角形　n = 2k＋1　（ k ＝ 1 , 2 , 3 , … ）
角度の範囲　　$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2n}$

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \left\{ \ell \sin\left(\frac{n-1}{2n}\pi + \theta\right) \right\} d\theta \qquad S_2 = \frac{d\pi}{2n}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \left\{ \ell \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2n}\right) \right\} d\theta$$

$$= \left[\ell \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2n}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{2n}}$$

$$= \ell \sin\frac{\pi}{2n} \qquad S = \frac{S_1}{S_2} = \frac{2n\ell}{d\pi}\sin\frac{\pi}{2n}$$

3. 研究の結果と考察

n が偶数であっても奇数であっても，正２n 角形を無数の等間隔の平行線に投げ入れたとき，平行線に触れる確率は

$$\mathbf{S = \frac{2n\ell}{d\pi}\sin\frac{\pi}{2n}}$$

n ：2 以上の自然数
ℓ：正２n 角形の一番長い対角線の長さ
d ：平行線の間隔

n を大きくすると，正２n 角形が平行線に触れる確率は大きくなる。
$n \to \infty$のとき図形は，円になっていく。
$t = \frac{\pi}{2n}$とすると$n \to \infty$のとき$t \to +0$となって

$$\mathbf{S = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n\ell}{d\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right) = \lim_{t\to+0}\left(\frac{\ell}{d}\cdot\frac{\sin t}{t}\right) = \frac{\ell}{d}\cdot 1 = \frac{\ell}{d}}$$

したがって，図形が円に近づいていくと，平行線に触れる確率は，$\frac{\ell}{d}$に近づいていく。

4. 感想と今後の課題

n = 2k のときと n = 2k＋1 のときの確率が同じであることに驚きました。なんとか正２n 角形が平行線に触れる確率を一般化できてよかったです。今後は，実際に正２n 角形を落として今回求めた値に近づくのか実験して確かめたいです。また，正奇数角形についても条件設定を見直して調べてみたいです。

5. 参考文献

・ビュフォンの針実験 — 針を投げるだけで円周率が求まる
https://analytics-notty.tech/buffon-needle-experiment/