World of Function　～Regularity of Rose curves～

出淵　航輝　　河野　慎也　　長島　悠輔

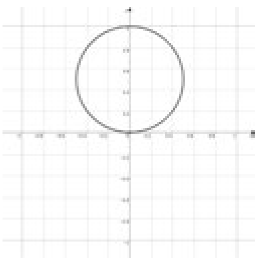
1. 研究の動機や目的

教科書やインターネットで研究のテーマについて調べていたところ，特殊な曲線が多数存在することが分かった。その中でも正葉曲線（Rose curves）は変数の値を変えると特にグラフの概形が大きく変化したのでこれに興味を持ち，調べることにした。目的は以下の通りである。

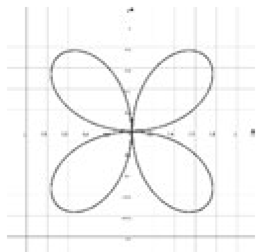
極方程式$r = sina\theta$（aは有理数）で表される正葉曲線の規則性を grapes や Integral Calculator を用いて調べる。grapes とは入力した関数をグラフ化するソフトであり，Integral Calculator は積分計算を行いその過程と結果を表示するウェブサイトである。

2. 研究の方法や内容

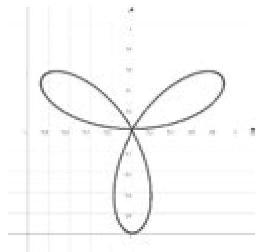
a＝1



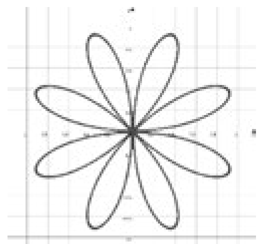
a＝2



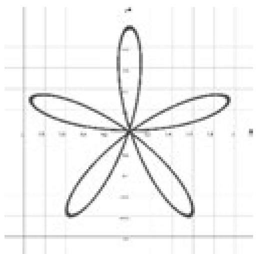
a＝3



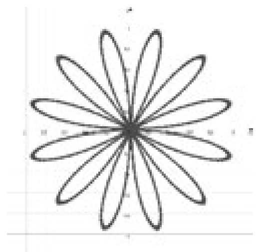
a＝4



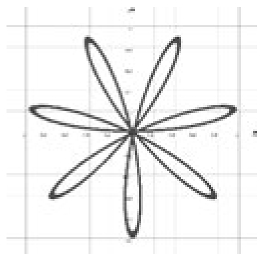
a＝5



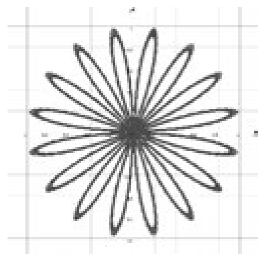
a＝6



a＝7



a＝8



上に示したグラフは$r = sina\theta$の a の値を 1 から 8 まで変化させたときのそれぞれの概形である。

我々は今回，①葉の枚数　②葉の面積　③葉の周りの長さ　の三つの規則性について調べることにした。なおここに記す葉というのは，極からもう一度極まで戻ってくる囲まれた部分を言い，その極まで戻ってくる 1 回分を葉 1 枚と定義する。

また，この研究をするにあたり，初めに教科書「改訂版　数学Ⅲ（数研出版）」を一読したが正葉曲線が$r = sina\theta$（aは有理数）で表されるということしかわからなかった。

今回の研究では $r = sina\theta$ の a を自然数として研究をした。

まずは ①葉の枚数から研究をした。

$r = sina\theta$ の a の値を 1 から 8 まで変化させたときのそれぞれの葉の枚数を数えて，規則性の有無を確認した。

aの値	葉の枚数	aの値	葉の枚数
a=1	1	a=5	5
a=2	4	a=6	12
a=3	3	a=7	7
a=4	8	a=8	16

この表から a が奇数，偶数の時にそれぞれ異なる規則性があることが分かった。
その規則性とは，$r = sina\theta$ の a の値が奇数の時は葉の枚数が a 枚，偶数の時は $2a$ 枚になるということである。

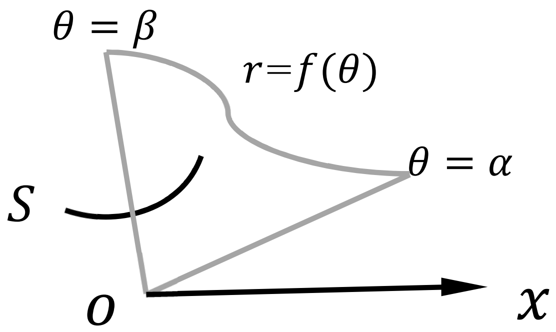
aが奇数	葉の枚数	aが偶数	葉の枚数
a=1	1	a=2	4
a=3	3	a=4	8
a=5	5	a=6	12
a=7	7	a=8	16

$a = 9$ 以降の葉の枚数についても同様の考え方ができる。

続いて ②葉の面積について研究をした。
面積を求めるために用いた積分の公式は以下のとおりである。

$$\boxed{\mathrm{S} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} \{f(\theta)\}^2 d\theta}$$

公式に出てくる文字は以下のとおりである。



グラフ上の点の極からの距離の最大値は 1 であり，$sina\theta$ =1 を満たす θ のうち 0 より大きいかつ最小のものは θ= $\frac{\pi}{2a}$であるから再び極に返って来るとき θ= $\frac{\pi}{a}$ である。よって今回の積分区間は 0 から $\frac{\pi}{a}$ とした。葉一枚の面積を S とおいて公式より，

$$\begin{aligned}\mathrm{S} &= \int_0^{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{1}{2} sin^2 a\theta\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{1 - cos2a\theta}{2}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{a}} (1 - cos2a\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{4}\left[\theta - \frac{1}{2a} sin2a\theta\right]_0^{\frac{\pi}{a}} \\ &= \frac{\pi}{4a}\end{aligned}$$

よって，葉一枚の面積は，$\frac{\pi}{4a}$ である。
葉一枚の面積×葉の枚数によって全体の面積を求めることができる。

aが奇数

	葉の枚数	葉１枚の面積	全体の面積
$a = 1$	1	π/4	π/4
$a = 3$	3	π/12	π/4
$a = 5$	5	π/20	π/4
$a = 7$	7	π/28	π/4

aが偶数

	葉の枚数	葉１枚の面積	全体の面積
$a = 2$	4	π/8	π/2
$a = 4$	8	π/16	π/2
$a = 6$	12	π/24	π/2
$a = 8$	16	π/32	π/2

この表はそれぞれ a の値が奇数，偶数のときの葉一枚の面積と全体の面積の関係を示したものである。これより，a の値が大きくなれば大きくなるほど，葉一枚の面積は小さくなるが，全体の面積は a が奇数のときは $\frac{\pi}{4}$，偶数のときは $\frac{\pi}{2}$ で一定になるという規則性がわかった。
この規則性についても，$a = 9$ 以降も同様の考え方ができる。

最後に ③葉の周りの長さについて，研究をした。
ここでは葉一枚の周りの長さを，

i. 積分による計算
ii. 直線による近似
iii. キルビメータを用いた測定

の三種類の方法で求めることにした。
まず i. について説明する。
長さを求めるために用いた積分の公式は以下のとおりである。

$$\boxed{L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\{f(\theta)\}^2 + \{f'(\theta)\}^2}\,d\theta}$$

この公式に $\alpha = 0$，$\beta = \frac{\pi}{a}$，$f(\theta) = sina\theta$ を代入して，

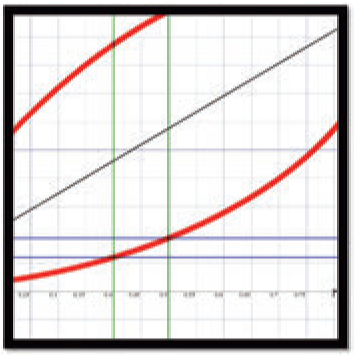
$$\boxed{\int_{0}^{\frac{\pi}{a}} \sqrt{sin^2 a\theta + a^2 cos^2 a\theta}\,d\theta}$$

この式の a の値に自然数を代入して Integral Calculator を用いて計算する。

	葉一枚の長さ		葉一枚の長さ
$a=1$	3.14159	$a=6$	2.07501
$a=2$	2.42211	$a=7$	2.05816
$a=3$	2.22748	$a=8$	2.04656
$a=4$	2.14461	$a=9$	2.03821

これが a の値に 1 から 8 まで代入して計算した結果である。

この表より a の値が奇数，偶数に関係なく大きくなるにつれて葉一枚の周りの長さが小さくなっていることがわかる。



葉一枚の周りの長さを求める積分の計算結果は a を用いて一般化することができなかったので i. の結果が正しいかどうかを裏付けるために，ⅱ．ⅲ．の方法を行った。

ⅱ.について説明する。

右の図は，$r = sin3\theta$ での近似を説明するための図である。

赤線は $r = sin3\theta$ の一枚の葉の一部

緑線は $x = 0.4$ と $x = 0.5$

青線は $y = 0.060$ と $y = 0.094$　である。

赤線を，緑線と青線で囲まれた長方形の対角線とみなし，三平方の定理を用いて計算し，足し合わせる。

今回はa=2,3,4 の三つの値について近似を行う。

a=2

xの区間	直線の長さ
0～0.10	0.100319
0.10～0.20	0.101119
0.20～0.30	0.103581
0.30～0.40	0.106977
0.40～0.50	0.114127
0.50～0.60	0.12621
0.60～0.70	0.156205
0.70以降	0.386888
Sum	2.390852

a=3

xの区間	直線の長さ
0～0.10	0.100244
0.10～0.20	0.100498
0.20～0.30	0.101607
0.30～0.40	0.103077
0.40～0.50	0.105621
0.50～0.60	0.109658
0.60～0.70	0.117136
0.70～0.80	0.133206
0.80以降	0.244372
Sum	2.230838

a=4

xの区間	直線の長さ
0～0.10	0.100319
0.10～0.20	0.100244
0.20～0.30	0.100841
0.30～0.40	0.101788
0.40～0.50	0.103077
0.50～0.60	0.105304
0.60～0.70	0.108853
0.70～0.80	0.116107
0.80～0.90	0.137931
0.90以降	0.086127
Sum	2.121182

これが計算結果をまとめた表である。表の一番下の値がそれぞれの x の区間で求めた直線（実際は曲線だが）の長さをすべて足し合わせたものである。

こちらの結果からも i. の方法で求めた値が信頼できるものとわかる。

最後に iii. について説明する

キルビメータとは図面上の曲線の長さを測る道具で曲線計ともいう。主に地図上の道路や鉄道などの距離を測るのに用いる。

求めたい関数を grapes で描き，用紙に印刷する。その紙上でキルビメータを転がし，葉一枚の周りの長さを測る。こちらも同様に a ＝2, 3, 4 の三つの値について計算を行う。a の値 1 つに対して 12 回ずつ測定を行った。

	$a=2$	$a=3$	$a=4$
1回目	2.31	2.22	2.15
2回目	2.35	2.19	2.10
3回目	2.39	2.21	2.12
4回目	2.35	2.19	2.10
5回目	2.40	2.20	2.10
6回目	2.37	2.20	2.10
7回目	2.38	2.19	2.10
8回目	2.39	2.22	2.09
9回目	2.39	2.19	2.09
10回目	2.40	2.19	2.09
11回目	2.32	2.20	2.10
12回目	2.33	2.19	2.09
Average	**2.365**	**2.199**	**2.102**

これが測定の結果をまとめた表である。表の一番下の値が平均値である。
人の手でやることで若干の誤差は出るものの，i. の方法で求めた値が信頼できるものと分かる。
i. ii. iii. の結果を 1 つの表にして比較してみる。

	積分による計算	直線による近似	キルビメータを用いた測定
$a=2$	2.422	2.391	2.365
$a=3$	2.227	2.231	2.199
$a=4$	2.145	2.121	2.102

この表から方法によって若干のずれはあるものの，i. の結果が信頼できるものといえる。
よって i. の方法から， a の値が奇数，偶数に関係なく大きくなるにつれて葉一枚の周りの長さが小さくなっているという規則性が分かった。
またグラフ上の点の極からの距離の最大値は 1 であるから，葉一枚の周りの長さは a の値が大きくなるにつれて限りなく 2 に近づいていくと考えられる。

3. 研究の結果と考察

これまで ①葉の枚数 ②葉の面積 ③葉の周りの長さ の三つの規則性について調べてきた。分かった規則性をもう一度まとめておく。

① 葉の枚数

$r = \sin a\theta$ の a の値が奇数の時は葉の枚数は a 枚，偶数の時は $2a$ 枚になる。

② 葉の面積

a の値が大きくなれば大きくなるほど，葉一枚の面積は小さくなるが，全体の面積は a が奇数のときは $\frac{\pi}{4}$，偶数のときは $\frac{\pi}{2}$ で一定になる。

③ 葉の周りの長さ

a の値が奇数，偶数に関係なく大きくなるにつれて葉一枚の周りの長さの値が小さくなり，限りなく 2 に近づく。

4. 感想と今後の課題

この研究を始めるまでは極方程式というものも，こんなに面白い関数がたくさんあることも知らなかった。身近な場面でも様々なところで数学を使用したものがあり，それについても研究してみたいと思った。今回，高校生の学習範囲を超えた研究ではあったが，なぜそういう公式が成り立つのかを考えながらひとつひとつの研究をすることができ，数学に関して興味がさらに湧く貴重な体験であった。やりきれなかった部分をもう一

度同じメンバーでやりたいと強く願うほど楽しい研究だった。指導してくださった先生方に深く感謝申し上げる。

今回は正葉曲線について研究したが，もちろんこれ以外にも見つけられていない規則性が多く存在するはずである。今後は，教科書には a は有理数と書いてあったが，自然数の a しか調べることができなかったので他の有理数 a についても挑戦してみたい。また，a=9 以降の葉の枚数や面積，a=5 以降の葉一枚の周りの長さの測定も行い，見つけた規則性について更なる確信を得たいと思う。

5. 参考文献

教科書　「改訂版　数学Ⅲ（数研出版）」
技術評論社　一冊でマスター　大学の積分